Ähnlichkeitslösungen der magnetohydrostatischen Gleichungen

Richter, Egon W.

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 46, 1995, S.79-88

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Ähnlichkeitslösungen der magnetohydrostatischen Gleichungen

Von **Egon W. Richter***, Braunschweig

(Eingegangen am 19.12.1995)

1. Einleitung

Die Grundgleichungen zur phänomenologischen Beschreibung der Bewegung elektrisch leitender Flüssigkeiten und Gase (Plasmen) in Anwesenheit von Magnetfeldern werden in der Magnetohydrodynamik formuliert. Im statischen Fall vereinfachen sich diese Gleichungen zu

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p, \ \mathbf{j} = \mu_0^{-1} \ \nabla \times \mathbf{B}, \ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1}$$

wobei $\mathbf{j}$ die Stromdichte, $\mathbf{B}$ das Magnetfeld, p der hydrostatische Druck sowie μ_0 die magnetische Feldkonstante ist und von zusätzlichen äußeren Kräften abgesehen wird. Die Stromdichte kann sofort eliminiert werden. Es ist zweckmäßig, das dabei entstehende Gleichungssystem dimensionslos zu formulieren. Führt man als Bezugsgrößen für das Magnetfeld B_0 und für den Druck p_0 ein, so ergibt sich als charakteristische Größe $\mu_0 p_0$ B_0^{-2}, in die offensichtlich keine charakteristische Länge eingeht. Für das Gleichgewicht zwischen Druckkraft und magnetischer Kraft hat die charakteristische Größe den Wert 1, so daß magnetohydrostatisches Gleichgewicht ohne zusätzliche äußere Kräfte durch die quasilinearen, dimensionslosen Differentialgleichungen

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \nabla p, \ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2}$$

beschrieben wird. Aus (1) bzw. (2) folgt unmittelbar

$$\mathbf{B} \cdot p = 0. \tag{3}$$

Die Feldlinien magnetohydrostatischer Felder liegen also stets in Flächen konstanten Drucks.

Magnetohydrostatische Konfigurationen wurden zuerst im Hinblick auf spezielle kosmische Strukturen betrachtet [1]. Einige Jahre später waren derartige Gleichgewichtskonfigurationen auch im Zusammenhang mit der Möglichkeit interessant, ein Plasma durch ein Magnetfeld zusammenzuhalten und einzuschließen [2]. Seitdem sind in zahlreichen Arbeiten Existenzaussagen und spezielle Lösungen des Systems (2) diskutiert worden (für Literaturzitate z.B. [3]). Im folgenden sollen Ähnlichkeitslösungen des Systems (2) mit der Methode der Symmetrie-Reduktion ermittelt werden, die auch eine Klassifikation der Ähnlichkeitslösungen mit Hilfe der Gruppenkonjugation ermöglicht. Da das System (2) für $p = const.$ in das Gleichungssystem für kraftfreie Magnetfel-

* Prof. em. Dr. E.W. Richter · Sommerlust 33 · 38118 Braunschweig

der übergeht, soll hier so weit wie möglich an eine Klassifikation der Ähnlichkeitslösungen kraftfreier Magnetfelder [4] angeknüpft werden.

2. Lie-Symmetriegruppe und Optimalsysteme

Transformationen der Variablen eines Differentialgleichungssystems, die Lösungen des Systems wieder auf (im allgemeinen andere) Lösungen desselben Systems abbilden, heißen *Symmetrietransformationen* des Differentialgleichungssystems. Im folgenden werden diskrete Symmetrien nicht berücksichtigt, sondern nur zusammenhängende lokale Lie-Punktsymmetrien betrachtet. Zur Bestimmung der Lie-Symmetriegruppe G des Differentialgleichungssystems (2) wird das in der Literatur ausführlich beschriebene Standardverfahren benutzt (z.B. [5]). Danach muß der infinitesimale Generator

$$v = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial y} + \xi_3 \frac{\partial}{\partial z} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial B_x} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial B_y} + \eta_3 \frac{\partial}{\partial B_z} + \eta_4 \frac{\partial}{\partial p} \tag{4}$$

mit $\xi_i = \xi_i\,(\mathrm{x}, \mathbf{B}, p)$, $i = 1, 2, 3$, $\eta_j = (\mathrm{x}, \mathbf{B}, p)$, $j = 1, 2, 3, 4$ nach seiner Verlängerung in den $\mathbb{R}^{19}$, dessen Koordinaten alle Variablen und alle ersten Ableitungen der abhängigen Veränderlichen sind, angewandt auf (2) Null ergeben. Einige der auftretenden Ableitungen lassen sich mit Hilfe von (2) eliminieren. Für die dann noch verbleibenden Ableitungen existieren keine weiteren Bedingungen, so daß die Koeffizienten dieser Ableitungen Null sein müssen. Es ergibt sich ein aus 175 linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bestehendes überbestimmtes System, dessen Lösungen die Koeffizienten von (4) festlegen. Man erhält neun infinitesimale Generatoren

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\
v_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, \\
v_3 &= \frac{\partial}{\partial z}, \\
v_4 &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} + B_y \frac{\partial}{\partial B_x} - B_x \frac{\partial}{\partial B_y}, \\
v_5 &= x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} + B_x \frac{\partial}{\partial B_z} - B_z \frac{\partial}{\partial B_x}, \\
v_6 &= z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} + B_z \frac{\partial}{\partial B_y} - B_y \frac{\partial}{\partial B_z}, \\
v_7 &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}, \\
v_8 &= B_x \frac{\partial}{\partial B_x} + B_y \frac{\partial}{\partial B_y} + B_z \frac{\partial}{\partial B_z} + 2p \frac{\partial}{\partial p}, \\
v_9 &= \frac{\partial}{\partial p},
\end{aligned} \tag{5}$$

die eine Basis einer neundimensionalen Lie-Algebra $\mathcal{G}$ bilden, d.h. eines neundimensionalen Vektorraumes, auf dem als zusätzliche Struktur der Kommutator $[v_j, v_k] = v_j(v_k) - v_k(v_j)$ definiert ist (vgl. Tabelle 1).

$[v \downarrow, v \rightarrow]$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
v_1	0	0	0	$-v_2$	v_3	0	v_1	0	0
v_2	0	0	0	v_1	0	$-v_3$	v_2	0	0
v_3	0	0	0	0	$-v_1$	v_2	v_3	0	0
v_4	v_2	$-v_1$	0	0	$-v_6$	v_5	0	0	0
v_5	$-v_3$	0	v_1	v_6	0	$-v_4$	0	0	0
v_6	0	v_3	$-v_2$	$-v_5$	v_4	0	0	0	0
v_7	$-v_1$	$-v_2$	$-v_3$	0	0	0	0	0	0
v_8	0	0	0	0	0	0	0	0	$-2v_9$
v_9	0	0	0	0	0	0	0	$2v_9$	0

Tabelle 1:
Kommutatortabelle der Basis (5)

Die Lie-Algebra $\mathcal{G}$ ist der Lie-Symmetriegruppe G zugeordnet. Mit Hilfe der auf $\mathcal{G}$ definierten Exponentialabbildung kann jedem infinitesimalen Generator von (5) eine einparametrige Untergruppe G_i von G zugeordnet werden. Aus

$$g_i \in G_i \text{ mit } g_i = \exp(\varepsilon v_i),\ \varepsilon \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, 9. \tag{6}$$

ergeben sich die einparametrigen Gruppen

G_1, G_2, G_3	*Translationen in x- bzw. y- bzw. z-Richtung,*
G_4, G_5, G_6	*Drehungen in der (x, y)- bzw. (x, z)- bzw. (y, z)-Ebene,*
G_7	*Räumliche Skalierung,*
G_8	*Skalierung der Felder,*
G_9	*Druckverschiebung.*

Jedes Element g der neunparametrigen Symmetriegruppe G des Systems (2) kann schließlich in einer Umgebung des Einzelelements der Gruppe dargestellt werden durch

$$g = \exp(\varepsilon_9 v_9) \cdot \ldots \cdot \exp(\varepsilon_1 v_1), \tag{7}$$

für geeignete $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_9) \in \mathbb{R}^9$.

Das Element $g \in G$ erzeugt die Transformation

$$(\mathrm{x}, \mathbf{B}, p) \mapsto (\mathbf{a} + e^{\varepsilon_7} R\,\mathrm{x}, e^{\varepsilon_8} R\,\mathbf{B}, (e^{2\varepsilon_8} - 1)\,\varepsilon_9 + e^{2\varepsilon_8} p) \tag{8}$$

mit einem Verschiebungsvektor $\mathbf{a} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ und einer Matrix $R = R_4 R_5 R_6$, die sich aus folgenden orthogonalen Matrizen ergibt:

$$R_4 = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon_4 & \sin\varepsilon_4 & 0 \\ -\sin\varepsilon_4 & \cos\varepsilon_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_5 = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon_5 & 0 & -\sin\varepsilon_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varepsilon_5 & 0 & \cos\varepsilon_5 \end{pmatrix},$$

$$R_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon_6 & \sin\varepsilon_6 \\ 0 & -\sin\varepsilon_6 & \cos\varepsilon_6 \end{pmatrix}.$$

Die Wirkung des Elements (7) der Symmetriegruppe G auf Lösungen des Differentialgleichungssystems (2) läßt sich explizit angeben. Wenn $\mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathrm{x})$, $p = h(\mathrm{x})$ eine Lösung für (2) ist, so ist es auch

$$\mathbf{B} = e^{\varepsilon_8} R\,\mathbf{f}\,(e^{-\varepsilon_7} R^{-1}(\mathrm{x}-\mathrm{a})), \tag{10}$$

$$p = (e^{2\varepsilon_8} - 1)\,\varepsilon_9 + e^{2\varepsilon_8}\,h\,(e^{-\varepsilon_7} R^{-1}(\mathrm{x}-\mathrm{a})), \tag{11}$$

wobei R^{-1} das Inverse der Matrix R ist und $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_9) \in \mathbb{R}^9$ gilt.

Jede Lösung des Systems (2), die hinsichtlich der Wirkung irgendeiner Untergruppe H der Symmetriegruppe G *invariant* ist, heißt H-invariante Lösung oder Ähnlichkeitslösung des Systems. Mit Hilfe eines Invarianzkriteriums (vgl. [5]), in das die Koeffizienten der jeweils betrachteten infinitesimalen Generatoren eingehen, läßt sich für eine s-parametrige Untergruppe $H \subset G$ mit $s < 3$ aus (2) ein Differentialgleichungssystem (reduziertes System) herleiten, in dem nur $3 - s$ unabhängige Veränderliche (Ähnlichkeitsvariable) auftreten. Für $s = 2$ ist das reduzierte System ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem, dessen Lösungen invariant unter der gewählten Untergruppe und damit Ähnlichkeitslösungen des Systems (2) sind.

Die Menge der für einparametrige bzw. zweiparametrige Untergruppen der Symmetriegruppe G möglichen Ähnlichkeitslösungen kann klassifiziert werden. Als geeignetes Kriterium für die Klassifikation bezüglich s-parametriger Untergruppen von G erweist sich die Gruppenkonjugation. Ähnlichkeitslösungen, die durch Elemente irgendeiner Untergruppe $H \subset G$ aufeinander abgebildet werden können, bezeichnet man als *nicht wesentlich* verschieden. Für jedes $g \in G$ mit $g \notin H$ wird eine H-invariante Lösung auf eine gHg^{-1}-invariante Lösung abgebildet, so daß nicht wesentlich verschiedene Ähnlichkeitslösungen zu konjugierten Untergruppen von G gehören. Andererseits zerfällt die Menge aller s-parametrigen Untergruppen von G in disjunkte Klassen paarweise konjugierter Untergruppen. Um die *wesentlich* verschiedenen Ähnlichkeitslösungen zu erfassen, genügt es also, Listen von Repräsentanten der Klassen paarweise konjugierter (s-parametriger) Untergruppen von G aufzustellen. Derartige Listen werden Optimalsysteme genannt. Wenn man für alle Untergruppen eines Optimalsystems bezüglich s-parametriger Untergruppen von G eine Ähnlichkeitslösung des Systems (2) kennt, so kann jede andere Ähnlichkeitslösung, die invariant unter irgendeiner s-parametrigen Untergruppe von G ist, mit Hilfe eines geeigneten Elements $g \in G$ gemäß (10) und (11) hergestellt werden. Die Zuordnung der Lie-Untergruppen von G zu Lie-Unteralgebren von $\mathcal{G}$ ermöglicht, anstelle eines Optimalsystems bezüglich s-parametriger Untergruppen von G zunächst ein Optimalsystem bezüglich s-dimensionaler Unteralgebren von $\mathcal{G}$ zu betrachten, das mit Θ_s bezeichnet wird. Wenn ein aus Unteralgebren bestehendes Optimalsystem bekannt ist, kann das entsprechende Optimalsystem bezüglich der Untergruppen mit Hilfe der Exponentialabbildung konstruiert werden. Techniken zu Herstellung von Optimalsystemen bezüglich s-dimensionaler Unteralgebren von $\mathcal{G}$ können der Literatur entnommen werden (z.B. [5], [6], [7]). Die Ergebnisse einer Klassifikation für Optimalsysteme bezüglich ein- und zweidimensionaler Unteralgebren der Lie-Algebra $\mathcal{G}$ sind in den Tabellen 2 und 3 zusammengestellt, wobei die innerhalb der Klammern stehenden Vektorfelder eine Basis des jeweiligen Unteralgebra-Repräsentanten der Klasse angeben. In Tabelle 3 wurden nur diejenigen Klassen zweidimensionaler Unteralgebren berücksichtigt, bei denen die notwendigen Bedingungen für die Existenz von Ähnlichkeitslösungen (vgl. [5]) erfüllt sind und somit reduzierte Gleichungen existieren.

$\mathcal{X}(v_1+av_6+v_8)$	$\mathcal{X}(-v_1+av_6+v_8)$	$\mathcal{X}(v_1+v_6+bv_9)$	$\mathcal{X}(-v_1+v_6+bv_9)$
$\mathcal{X}(av_6+v_7+cv_8)$	$\mathcal{X}(av_6+v_7+bv_9)$	$\mathcal{X}(av_6+v_8)$	$\mathcal{X}(v_6+bv_9)$
$\mathcal{X}(v_1+bv_9)$	$\mathcal{X}(-v_1+bv_9)$	$\mathcal{X}(v_1+v_8)$	$\mathcal{X}(v_9)$

Tabelle 2: Optimalsystem Θ_1, wobei $a \geq 0$, $b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}_\pm$ gilt

$\mathcal{X}(v_1, v_2)$	$\mathcal{X}(-v_1, v_2+v_9)$	$\mathcal{X}(v_3, bv_4+2v_7+v_8)$
$\mathcal{X}(v_3, v_4+av_8)$	$\mathcal{X}(v_3, v_4+v_9)$	$\mathcal{X}(v_4, v_7 \pm v_9)$
$\mathcal{X}(v_1+av_8, v_2 \pm v_8)$	$\mathcal{X}(v_1+v_9, v_2+av_9)$	$\mathcal{X}(v_3 \pm v_8, v_4+av_8)$
$\mathcal{X}(v_3 \pm v_9, v_4+av_9)$	$\mathcal{X}(v_3 \pm v_9, bv_4+2v_7+v_8)$	$\mathcal{X}(v_4+av_8, v_7+bv_8)$
$\mathcal{X}(v_4+v_9, v_7+bv_9)$		

Tabelle 3: Optimalsystem Θ_2, wobei $a \geq 0$ und $b \in \mathbb{R}$ gilt

3. Reduzierte Gleichungen und Ähnlichkeitslösungen

Im folgenden werden für das System (2) nur Ähnlichkeitslösungen diskutiert, die sich aufgrund des Optimalsystems Θ_2 ergeben. Die zugehörigen reduzierten Gleichungen sind jeweils vier gewöhnliche Differentialgleichungen mit λ als unabhängiger Variabler (Ähnlichkeitsvariable) und $\zeta_1, \ldots, \zeta_4$ als abhängige Veränderliche, deren Ableitungen nach λ in der Form $\zeta_1', \ldots \zeta_4'$ geschrieben werden. Reduzierte Gleichungen werden nur mitgeteilt, wenn keine analytischen Lösungen gefunden wurden. Numerische Lösungen der reduzierten Gleichungen werden nicht diskutiert. Gelegentlich ist es übersichtlicher, die Ergebnisse nicht in kartesischen Koordinaten (x, y, z), sondern in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) darzustellen. Einige Lösungen sind nur dann physikalisch sinnvoll, wenn $p \geq 0$ durch zusätzliche Einschränkungen von Konstanten bzw. Koordinatenintervallen sichergestellt wird. Im folgenden wird auf derartige Einschränkungen nicht explizit hingewiesen und die triviale Lösung für (2), d.h. $\mathbf{B} = const$, $p = const$, wird nirgends gesondert erwähnt.

$\mathcal{X}^1\,(v_1, v_2)$

Die reduzierten Gleichungen lassen nur im Fall $B_z = 0$ nichttriviale Lösungen zu. Die Ähnlichkeitsvariable ist z, und für die Lösungen bestehen außer der Bedingung

$$2^{-1}\,((B_x(z))^2 + (B_y(z))^2) + p(z) = const \tag{12}$$

keine weiteren Einschränkungen.

$\mathcal{X}^2\,(v_1, v_2 + v_9)$

$$\begin{aligned} B_x(x,y,z) &= c_1, \quad B_y(x,y,z) = zc_3^{-1} + c_2, \\ B_z(x,y,z) &= c_3, \quad p(x,y,z) = y - z^2(2c_3^2)^{-1} - zc_2c_3^{-1} + c^4 \end{aligned} \tag{13}$$

mit $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 4$, und $c_3 \in \mathbb{R}_\pm$.

$\mathcal{X}^3\,(v_3, bv_4 + 2v_7 + v_8)$

Für $b \neq 0$ gilt mit $\lambda = \varphi + b\ln(\sqrt{\rho})$:

$$\begin{aligned} B_\rho(\rho,\varphi,z) &= \exp(-\varphi b^{-1})\,\zeta_1(\lambda), \quad B_\varphi(\rho,\varphi,z) = \exp(-\varphi b^{-1})\,\zeta_2(\lambda), \\ B_z(\rho,\varphi,z) &= \exp(-\varphi b^{-1})\,\zeta_3(\lambda), \quad p(\rho,\varphi,z) = \exp(-2\varphi b^{-1})\,\zeta_4(\lambda). \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \zeta_2\zeta_1' - 2^{-1}b\,(\zeta_2\zeta_2' + \zeta_3\zeta_3') - b^{-1}\,\zeta_1\zeta_2 - \zeta_2^2 &= 2^{-1}b\,\zeta_4', \\ 2^{-1}b\,\zeta_1\zeta_2' - \zeta_1\zeta_1' - \zeta_3\zeta_3' + \zeta_1\zeta_2 + b^{-1}\,(\zeta_1^2 + \zeta_3^2) &= \zeta_4' - 2b^{-1}\,\zeta^4, \\ 2^{-1}b\,\zeta_1\zeta_3' + \zeta_2\zeta_3' - b^{-1}\,\zeta_2\zeta_3 &= 0, \\ 2^{-1}b\,\zeta_1' + \zeta_2' + \zeta_1 - b^{-1}\,\zeta_2 &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Für $b = 0$ gilt mit $\lambda = yx^{-1}$:

$$\begin{aligned} B_x(x,y,z) &= \sqrt{x}\,\zeta_1(\lambda), \quad B_y(x,y,z) = \sqrt{x}\,\zeta_2(\lambda), \\ B_z(x,y,z) &= \sqrt{x}\,\zeta_3(\lambda), \quad p(x,y,z) = x\,\zeta_4(\lambda). \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \zeta_2\zeta_1' + \lambda\,(\zeta_2\zeta_2' + \zeta_3\zeta_3' + \zeta_4') - 2^{-1}\,(\zeta_2^2 + \zeta_3^2) - \zeta_4 &= 0, \\ \zeta_1\zeta_3' + \lambda\zeta_1\zeta_2' + \zeta_3\zeta_3' + \zeta_4' - 2^{-1}\,\zeta_1\zeta_2 &= 0, \\ (\zeta_2 - \lambda\zeta_1)\,\zeta_3' + 2^{-1}\,\zeta_1\zeta_3 &= 0, \\ \lambda\zeta_1' - \zeta_2' - 2^{-1}\,\zeta_1 &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Unter Ausnutzung von (3) ergibt sich für (14) mit (15) ebenso wie für (16) mit (17) $p = cB_z^2$, $c \geq 0$.

$\mathcal{X}^4\,(v_3, v_4 + av_8)$

Es gilt $a \geq 0$ und mit $\lambda = \rho$ folgt

$$\begin{aligned} B_\rho(\rho,\varphi,z) &= \exp(-a\varphi)\,\zeta_1(\lambda), \quad B_\varphi(\rho,\varphi,z) = \exp(-a\varphi)\,\zeta_2(\lambda), \\ B_z(\rho,\varphi,z) &= \exp(-a\varphi)\,\zeta_3(\lambda), \quad p(\rho,\varphi,z) = \exp(-2a\varphi)\,\zeta_4(\lambda). \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \lambda(\zeta_2\zeta_2' + \zeta_3\zeta_3' + \zeta_4') + a\,\zeta_1\zeta_2 + \zeta_2^2 &= 0,\\ \lambda\zeta_1\zeta_2' + \zeta_1\zeta_2 + a\,(\zeta_1^2 + \zeta_3^2) + 2a\,\zeta_4 &= 0,\\ \lambda\zeta_1\zeta_3' - a\,\zeta_2\zeta_3 &= 0,\\ \lambda\zeta_1' + \zeta_1 - a\,\zeta_2 &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Das System (19) kann in der Form

$$\zeta_i' = g_i(\lambda, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4), \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{20}$$

geschrieben und als ein nichtautonomes dynamisches System mit λ anstelle der Zeit interpretiert werden. In Untersuchungen zum qualitativen Verhalten der Lösungen nichtlinearer dynamischer Systeme sind Stabilitätsuntersuchungen besonders wichtig, wobei die Ljapunovsche Stabilitätstheorie für kritische Punkte eine zentrale Rolle spielt (z.B. [8]). In dieser Theorie ist die Existenz einer Ljapunovfunktion von wesentlicher Bedeutung. Deshalb ist es interessant, daß sich für

$$\eta = 2^{-1}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2) + \zeta_4 \tag{21}$$

aus (19) $\eta' = -2\lambda^{-1}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)$ ergibt. Die Energiedichte $E = \exp(-2a\varphi)\,\eta$ nimmt mit wachsendem λ also niemals zu und erfüllt die Bedingungen für eine Ljapunovfunktion in einer Umgebung der Nullösung, die ein kritischer Punkt des Systems (19) ist.

Unter Ausnutzung von (3) ergeben sich für (18) mit (19) $B_\rho = cB_z\,\rho^{-1}$, $c \in \mathbb{R}_\pm$ und $p = \tilde{c}B_z^2$, $\tilde{c} \geq 0$.

Für den Fall $a = 0$ folgt mit $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$

$$\zeta_1 = c_1\lambda^{-1},\ \zeta_2 = c_2\lambda^{-1},\ \zeta_3 = c_3,\ \zeta_4 = c_4. \tag{22}$$

$\mathcal{X}^5(v_3, v_4 + v_9)$

$$\begin{aligned} &B_\rho(\rho,\varphi,z) = c_1\rho^{-1}, && B_\varphi(\rho,\varphi,z) = -\rho\,(2c_1)^{-1},\\ &B_z(\rho,\varphi,z) = c_3, && p(\rho,\varphi,z) = -(\rho^2(2c_1)^{-2} + \varphi) + c_4 \end{aligned} \tag{23}$$

mit $c_1 \in \mathbb{R}_\pm$ und $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 3, 4$.

$\mathcal{X}^6(v_4, v_7 \pm v_9)$

Mit $\lambda = \rho z^{-1}$ folgt

$$\begin{aligned} &B_\rho(\rho,\varphi,z) = \zeta_1(\lambda), && B_\varphi(\rho,\varphi,z) = \zeta_2(\lambda),\\ &B_z(\rho,\varphi,z) = \zeta_3(\lambda), && p(\rho,\varphi,z) = \pm(\ln|z| + \zeta_4(\lambda)). \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \lambda^2\zeta_3\zeta_1' + \lambda(\zeta_2\zeta_2' + \zeta_3\zeta_3' + \zeta_4') + \zeta_2^2 &= 0,\\ \lambda(\zeta_1 - \lambda\zeta_3)\zeta_2' + \zeta_1\zeta_2 &= 0,\\ \lambda(\zeta_1\zeta_1' + \zeta_2\zeta_2' + \zeta_4') + \zeta_1\zeta_3' - 1 &= 0,\\ \lambda(\zeta_1' - \lambda\zeta_3') + \zeta_1 &= 0. \end{aligned} \tag{25}$$

$\mathcal{X}^7\,(v_1 + a\,v_8, v_2 \pm v_8)$

Es gilt $a \geq 0$ und mit $\lambda = z$ folgt

$$\begin{aligned} B_x(x,y,z) &= \exp(a\,x \pm y)\,\zeta_1(\lambda), & B_y(x,y,z) &= \exp(a\,x \pm y)\,\zeta_2(\lambda), \\ B_z(x,y,z) &= \exp(a\,x \pm y)\,\zeta_3(\lambda), & p(x,y,z) &= \exp(2a\,x \pm 2y)\,\zeta_4(\lambda). \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \zeta_3\zeta_1' \pm \zeta_1\zeta_2 - a\,(\zeta_2^2 + \zeta_3^2) - 2a\,\zeta_4 &= 0, \\ \zeta_3\zeta_2' + a\,\zeta_1\zeta_2 \mp (\zeta_1^2 + \zeta_3^2) \mp 2\zeta_4 &= 0, \\ \zeta_1\zeta_1' + \zeta_2\zeta_2' + \zeta_4' - \zeta_3\,(a\,\zeta_1 \pm \zeta_2) &= 0, \\ \zeta_3' + a\,\zeta_1 \pm \zeta_2 &= 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Aus (27) folgt, daß nur $\zeta_3 \neq 0$ sinnvoll ist und

$$\zeta_3\zeta_3'' - \zeta_3'^2 + 2\,(1 + a^2)\,k_1 = 0, \tag{28}$$

$$2^{-1}\,(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2) + \zeta_4 = k_1 \tag{29}$$

mit $k_1 \in \mathbb{R}_+$ gilt. Unter Ausnutzung von (3) ergibt sich für (26) mit (27) $p = cB_z^2$, $c \geq 0$. Eine durch (28) nahegelegte Lösung ist z.B.

$$\begin{aligned} \zeta_1(\lambda) &= a\,\sqrt{k_1}\,\left(\sqrt{2\,(1 + a^2)^{-1}}\,\sin(k_2 z) \mp k_3\,(1 + a^2)^{-1}\cos(k_2 z)\right), \\ \zeta_2(\lambda) &= \sqrt{k_1}\,\left(\pm\sqrt{2\,(1 + a^2)^{-1}}\,\sin(k_2 z) + a^2 k_3\,(1 + a^2)^{-1}\cos(k_2 z)\right), \\ \zeta_3(\lambda) &= \sqrt{k_1}\,\cos(k_2 z), \\ \zeta_4(\lambda) &= k_2^{-1}\,(1 - a^2\,k_3^2\,(1 + a^2)^{-1})\cos^2(k_2 z) \end{aligned} \tag{30}$$

mit $k_2 = \sqrt{2\,(1 + a^2)}$ und $k_3 \geq 0$.

$\mathcal{X}^8\,(v_1 + v_9, v_2 + a\,v_9)$

Es gilt $a \geq 0$ und

$$\begin{aligned} B_x(x,y,z) &= zc_3^{-1}, & B_y(x,y,z) &= a\,zc_3^{-1}, \\ B_z(x,y,z) &= c_3, & p(x,y,z) &= c_4 + x + a\,y - (1 + a^2)\,z^2\,(2c_3^2)^{-1} \end{aligned} \tag{31}$$

mit $c_3 \in \mathbb{R}_\pm$ und $c_4 \geq 0$.

$\mathcal{X}^9\,(v_3 \pm v_8, v_4 + a\,v_8)$

Es gilt $a \geq 0$ und mit $\lambda = \rho$ folgt

$$\begin{aligned} B_\rho(\rho,\varphi,z) &= \exp(-a\,\varphi \pm z)\,\zeta_1(\lambda), & B_\varphi(\rho,\varphi,z) &= \exp(-a\,\varphi \pm z)\,\zeta_2(\lambda), \\ B_z(\rho,\varphi,z) &= \exp(-a\,\varphi \pm z)\,\zeta_3(\lambda), & p(\rho,\varphi,z) &= \exp(-2a\,\varphi \pm 2z)\,\zeta_4(\lambda). \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} \lambda\,(\zeta_2\zeta_2' + \zeta_3\zeta_3' + \zeta_4') + \zeta_1\,(a\,\zeta_2 \mp \lambda\zeta_3) + \zeta_2^2 &= 0, \\ \lambda\zeta_1\zeta_2' + \zeta_1\zeta_2 + a\,(\zeta_1^2 + \zeta_3^2 + 2\zeta_4) \pm \lambda\zeta_2\zeta_3 &= 0, \\ \lambda\zeta_1\zeta_3' \mp \lambda\,(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + 2\zeta_4) - a\,\zeta_2\zeta_3 &= 0, \\ \lambda\zeta_1' - a\,\zeta_2 \pm \lambda\zeta_3 + \zeta_1 &= 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Aus (33) folgt, daß nur $\zeta_3 \neq 0$ sinnvoll ist und

$$a\,\zeta_3 \pm \lambda\zeta_2 = k\,\lambda\zeta_1 \tag{34}$$

mit $k \in \mathbb{R}$ gilt. Ferner folgt für (21)

$$\eta' = -\lambda^{-1}\,(\zeta_1^2 + \zeta_2^2), \tag{35}$$

so daß die Energiedichte $E = \exp\,(-2a\varphi \pm 2z)\,\eta$ mit wachsendem λ niemals zunimmt. Damit erfüllt die Energiedichte die Bedingungen für eine Ljapunovfunktion in einer Umgebung der Nullösung, die ein kritischer Punkt des Systems (33) ist. Unter Ausnutzung von (3) ergibt sich für (32) mit (33) $p = c\rho^2\,B_\rho^2$, $c \geq 0$. Wenn B_ρ mit wachsendem ρ schwächer abnimmt als ρ^{-1}, kann der Druck mit wachsendem ρ also zunehmen, obwohl die Energiedichte nicht zunimmt.

$\mathcal{X}^{10}\,(v_3 \pm v_9, v_4 + a\,v_9)$

Es gilt $a \geq 0$ und

$$\begin{aligned} B_\rho\,(\rho, \varphi, z) &= c_1\rho^{-1},\ B_\varphi\,(\rho, \varphi, z) = c_2\rho^{-1} - a\,\rho\,(2c_1)^{-1}, \\ B_z\,(\rho, \varphi, z) &= \pm\,\rho^2\,(2c_1)^{-1} + c_3, \\ p\,(\rho, \varphi, z) &= \pm\,z - a\,\varphi - \rho^2\,(a^2\,(2c_1)^{-1} \pm c_3)\,(2c_1)^{-1} - \rho^4\,(8c_1^2)^{-1} \\ &\quad + a\,c_1^{-1}\,c_2 \ln\rho + c_4 \end{aligned} \tag{36}$$

mit $c_1 \in \mathbb{R}_\pm$ und $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 2, 3, 4$.

$\mathcal{X}^{11}\,(v_3 \pm v_9, bv_4 + 2v_7 + v_8)$

Für $b \neq 0$ gilt mit $\lambda = \varphi + b\ln(\sqrt{\rho})$:

$$\begin{aligned} B_\rho\,(\rho, \varphi, z) &= \exp\,(-\varphi b^{-1})\,\zeta_1\,(\lambda), \quad B_\varphi\,(\rho, \varphi, z) = \exp\,(-\varphi b^{-1})\,\zeta_2\,(\lambda), \\ B_z\,(\rho, \varphi, z) &= \exp\,(-\varphi b^{-1})\,\zeta_3\,(\lambda), \quad p\,(\rho, \varphi, z) = \pm\,z + \exp\,(-2\varphi b^{-1})\,\zeta_4\,(\lambda). \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \zeta_2\zeta_1' - 2^{-1}\,b\,(\zeta_2\zeta_2' + \zeta_3\zeta_3') - b^{-1}\,\zeta_1\zeta_2 - \zeta_2^2 &= 2^{-1}\,b\,\zeta_4', \\ 2^{-1}\,b\,\zeta_1\zeta_2' - \zeta_1\zeta_1' - \zeta_3\zeta_3' + \zeta_1\zeta_2 + b^{-1}\,(\zeta_1^2 + \zeta_3^2) &= \zeta_4' - 2b^{-1}\,\zeta^4, \\ 2^{-1}\,b\,\zeta_1\zeta_3' + \zeta_2\zeta_3' - b^{-1}\,\zeta_2\zeta_3 &= \pm\,\rho, \\ 2^{-1}\,b\,\zeta_1' + \zeta_2' + \zeta_1 - b^{-1}\,\zeta_2 &= 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Für $b = 0$ gilt mit $\lambda = yx^{-1}$:

$$\begin{aligned} B_x(x, y, z) &= \sqrt{x}\,\zeta_1\,(\lambda), \quad B_y\,(x, y, z) = \sqrt{x}\,\zeta_2\,(\lambda), \\ B_z(x, y, z) &= \sqrt{x}\,\zeta_3\,(\lambda), \quad p\,(x, y, z) = x\,\zeta_4\,(\lambda). \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} \zeta_2\zeta_1' + \lambda\,(\zeta_2\zeta_2' + \zeta_3\zeta_3' + \zeta_4') - 2^{-1}\,(\zeta_2^2 + \zeta_3^2) - \zeta_4 &= 0, \\ \zeta_1\zeta_3' + \lambda\,\zeta_1\zeta_2' + \zeta_3\zeta_3' + \zeta_4' - 2^{-1}\,\zeta_1\zeta_2 &= 0, \\ (\zeta_2 - \lambda\zeta_1)\,\zeta_3' + 2^{-1}\,\zeta_1\zeta_3 &= \pm\,1, \\ \lambda\zeta_1' - \zeta_2' - 2^{-1}\,\zeta_1 &= 0. \end{aligned} \tag{40}$$

$\mathscr{X}^{12}(v_4 \pm a\, v_8, v_7 + b\, v_8)$

Es gilt $a \geq 0$, $b \in \mathbb{R}$ und mit $\lambda = \rho z^{-1}$ folgt

$$\begin{aligned} &B_\rho(\rho, \varphi, z) = z^b \exp(-a\,\varphi)\, \zeta_1(\lambda), \quad B_\varphi(\rho, \varphi, z) = z^{\mathrm{b}} \exp(-a\,\varphi)\, \zeta_2(\lambda), \\ &B_z(\rho, \varphi, z) = z^b \exp(-a\,\varphi)\, \zeta_3(\lambda), \quad p(\rho, \varphi, z) \;= z^{2\mathrm{b}} \exp(-2a\,\varphi)\, \zeta_4(\lambda). \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} \lambda\,(\zeta_2\zeta_2' + \zeta_3\zeta_3' + \zeta_4') + \lambda^2\, \zeta_3\zeta_1' + a\,\zeta_1\zeta_2 - b\,\lambda\zeta_1\zeta_3 + \zeta_2^2 &= 0, \\ \lambda\,(\zeta_1 - \lambda\zeta_3)\,\zeta_2' + \zeta_1\zeta_2 + a\,(\zeta_1^2 + \zeta_3^2 + 2\zeta_4) + b\,\lambda\zeta_2\zeta_3 &= 0, \\ \lambda^2\,(\zeta_1\zeta_1' + \zeta_2\zeta_2' + \zeta_4') - b\,\lambda\,(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + 2\zeta_4) + \lambda\zeta_1\zeta_3' - a\,\zeta_2\zeta_3 &= 0, \\ \lambda\,(\zeta_1' - \lambda\zeta_3') - a\,\zeta_2 + b\,\lambda\zeta_3 + \zeta_1 &= 0. \end{aligned} \tag{42}$$

Für (21) folgt aus (42)

$$\eta' = -(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - \lambda\zeta_1\zeta_3 - 2b\,\lambda^2 E)\,(\lambda\,(1 + \lambda^2))^{-1}. \tag{43}$$

Interpretiert man (42) wie (19) als ein dynamisches System (20) mit λ anstelle der Zeit, so erweist sich die Nullösung als ein kritischer Punkt des Systems (42). Wegen (43) folgt allerdings, daß die Energiedichte $E = z^{2b} \exp(-2\mathrm{a}\varphi)\,\eta$ keine Ljapunovfunktion in einer Umgebung der Nullösung ist.

$\mathscr{X}^{13}(v_4 + v_9, v_7 + b\, v_9)$

Es gilt $b \in \mathbb{R}$ und mit $\lambda = \rho^{z-1}$ folgt

$$\begin{aligned} &B_\rho(\rho, \varphi, z) = \zeta_1(\lambda), \quad B_\rho(\rho, \varphi, z) \;= \zeta_2(\lambda), \\ &B_z(\rho, \varphi, z) = \zeta_3(\lambda), \quad p(\rho, \varphi, z) \;= b \ln|z| - \varphi + \zeta_4(\lambda). \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} \lambda(\zeta_2\zeta_2' + \zeta_3\zeta_3' + \zeta_4') + \zeta_2^2 &= 0, \\ \lambda(\zeta_1 - \lambda\zeta_3)\,\zeta_2' + \zeta_1\zeta_2 + 1 &= 0, \\ \lambda(\zeta_1\zeta_1' + \zeta_2\zeta_2' + \zeta_4') + \zeta_1\zeta_3' - b &= 0, \\ \lambda(\zeta_1' - \lambda\zeta_3') + \zeta_1 &= 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Literatur

[1] S. Lundquist, Ark. Fysik **2** (1951), 361.

[2] R. Lüst und A. Schlüter, Z. Astrophys. **34** (1954), 263.
H. Grad und H. Rubin, Proc. of the Second United Nations Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, 1958, edited by United Nations (United Nations Publication, Geneva, 1958), **31**, 190.

[3] A. Salat und R. Kaiser, IPP Report 6/327 (1995).

[4] E.W. Richter, Abhandl. Braunschw. Wiss. Ges. **52** (1990/91), 161; Z. Naturforsch. **49a** (1994), 902.

[5] L.V. Ovsiannikov, Group Analysis of Differential Equations (Academic Press, New York, 1982).
P.J. Olver, Application of Lie Groups to Differential Equations (Springer, Berlin, 1986).

[6] J. Patera, P. Winternitz, H. Zassenhaus, J. Math. Phys. **16** (1975), 1597, 1615.
J. Patera, R.T. Sharp, P. Winternitz, H. Zassenhaus, J. Math. Phys. **18** (1977), 2259.

[7] H. Kötz, Z. Naturforsch. **47a** (1992), 1161; **48a** (1993), 536.

[8] H. Amann, Gewöhnliche Differentialgleichungen (Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1983)